PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS OF THE ROYAL SOCIETY A
MATHEMATICAL, PHYSICAL & ENGINEERING SCIENCES

Cribler Les Entiers Sans Grand Facteur Premier

G. Tenenbaum

Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 1993 **345**, 377-384
doi: 10.1098/rsta.1993.0136

Cribler les entiers sans grand facteur premier

By G. Tenenbaum

Département de Mathématiques, Université de Nancy 1, BP 239, 54506 Vandœuvre les Nancy Cedex, France

Soit $\Psi(x,y)$ (resp. $\Psi_q(x,y)$) le nombre des entiers n'excédant pas x (resp. et premiers à q) dont le plus grand facteur premier ne dépasse pas y. Nous donnons un dommaine de validité et un terme reste optimaux pour l'approximation de $\Psi_q(x,y)$ par $(\varphi(q)/q)\,\Psi(x,y)$. Cela permet d'étendre le domaine de validité de l'approximation régulière de type de Bruijn fournie par Fouvry et l'auteur pour $\Psi_q(x,y)$.

Let $\Psi(x,y)$ (resp. $\Psi_q(x,y)$) denote the number of integars at most x (resp. and coprime to q) whose largest prime factor does not exceed y. We give both optimal range of validity and remainder term for the approximation of $\Psi_q(x,y)$ by $(\varphi(q)/q)\Psi(x,y)$. This yields an extension of the range of validity of the smooth approximation of de Bruijn type given by Fouvry and the author for $\Psi_q(x,y)$.

1. Introduction

Soit $P(n)$ le plus grand facteur premier d'un entier naturel générique n, avec la convention $P(1)=1$. La répartition asymptotique de l'ensemble

$$S(x,y) := \{n \leqslant x : P(n) \leqslant y\} \quad (x \geqslant y \geqslant 2)$$

dans les progressions arithmétiques a sucité plusieurs travaux récents (Balog & Pomerance 1991; Granville 1993; Fouvry & Tenenbaum 1991). Lorsque $(a,q)=1$, l'approximation naturelle pour

$$\Psi(x,y;a,q) := |S(x,y) \cap \{n \geqslant 1 : n \equiv a \,(\mathrm{mod}\, q)\}| \tag{1.1}$$

est $\Psi_q(x,y)/\varphi(q)$, où φ est la fonction d'Euler et où l'on a posé

$$\Psi_q(x,y) := |S(x,y) \cap \{n \geqslant 1 : (n,q)=1\}|. \tag{1.2}$$

Cette quantité, qui pose par ailleurs un intéressant problème de crible, est susceptible, en l'état actuel des techniques disponibles, d'être évaluée asymptotiquement dans un domaine, en x, y, q beaucoup plus large que celui dans lequel on peut espérer estimer (1.1).

Posons classiquement $\Psi(x,y) := |S(x,y)|$. Fouvry & Tenenbaum (1991, Théorème 1) ont montré que l'approximation heuristique

$$\Psi_q(x,y) \approx (\varphi(q)/q)\,\Psi(x,y) \tag{1.3}$$

a lieu sous des conditions assez peu restrictives pour les trois paramètres du problème. Nous nous proposons ici de préciser ce résultat en fournissant des estimations essentiellement optimales pour le domaine de validité et la taille du terme résiduel.

Phil. Trans. R. Soc. Lond. A (1993) **345**, 377–384
Printed in Great Britain

Nous notons traditionnellement $\omega(n)$ le nombre des facteurs premiers de n, comptés sans multiplicité; par ailleurs, nous posons sytématiquement dans tout l'article

$$u \coloneqq \log x/\log y \quad (x \geqslant y \geqslant 2).$$

Théorème. *Soit c une constante positive arbitraire. Sous la condition*

$$P(q) \leqslant y \leqslant x, \quad \omega(q) \leqslant y^{c/\log(1+u)}, \tag{Ω}$$

on a uniformément

$$\Psi_q(x,y) = \frac{\varphi(q)}{q}\Psi(x,y)\left\{1+O\left(\frac{\log(1+u)\log(1+\omega(q))}{\log y}\right)\right\}. \tag{1.4}$$

Remarques. (i) L'hypothèse $P(q) \leqslant y$ n'implique aucune perte de généralité. En effet, on a identiquement $\Psi_q(x,y) = \Psi_k(x,y)$, avec $k \coloneqq (q, \prod_{p \leqslant y} p)$.

(ii) Dans le cas $q = \prod_{p \leqslant z} p$, nous retrouvons un théorème de Saias (1990, corollaire 4.3, p. 97) concernant une fonction de crible étudiée par Friedlander (1976). La thèse de Saias contient beaucoup d'autres informations très précises sur ce problème. En particulier, l'optimalité du domaine (Ω) est établie pour les entiers q de la forme indiquée: si $z = x^{o(1)}$, la condition $\log(1+u)\log z/\log y \to 0$ est nécessaire et suffisante pour que $\Psi_q(x,y) \sim (\varphi(q)/q)\,\Psi(x,y)$ (Saias 1990, Théorème 4.5).

(iii) Notre résultat affine une estimation de Xuan (1993), qui a obtenu (1.4) dans un domaine relativement restreint en x, y, q, et avec un terme d'erreur supplémentaire $O(\mathrm{e}^{-c_0\sqrt{u}})$.

(iv) Le terme résiduel de (1.4) est optimal. Cela découle des théorèmes 2 et 3 de Fouvry & Tenenbaum, qui fournissent, uniformément pour

$$\exp\{(\log_2 x)^{(5/3)+\epsilon}\} \leqslant y \leqslant x^{1-\epsilon}, \quad \omega(q) \leqslant y^{1/(20\log_2 x)},$$

la formule asymptotique

$$\Psi_q(x,y) = x\frac{\varphi(q)}{q}\left\{\rho(u)+c_1(q)\frac{\rho'(u)}{\log y}+O\left(\frac{q}{\varphi(q)}\rho(u)\frac{\log^2(1+u)\log^2(\omega(q)+\log y)}{\log^2 y}\right)\right\}$$

où ρ désigne la fonction de Dickman et où l'on a posé

$$c_1(q) \coloneqq \gamma - 1 + \sum_{p|q}\frac{\log p}{p-1}.$$

(Ici et dans toute la suite, nous notons $\log_k$ la k-ième itérée de la fonction logarithme.) Compte tenu de l'évaluation de Hildebrand (1986), valable dans le même domaine,

$$\Psi(x,y) = x\rho(u)\{1+O(\log(1+u)/\log y)\}, \tag{1.5}$$

de la formule classique $\rho'(u)/\rho(u) \sim -\log u$ $(u \to +\infty)$, et du fait que la fonction $c_1(q)$ peut effectivement prendre des valeurs de l'ordre de $\log(1+\omega(q))$, on voit que le terme d'erreur de (1.4) ne peut être amélioré dans un très large sous-domaine de (Ω).

(v) Pour les 'grandes' valeurs de u, on peut relâcher quelque peu la contrainte sur $\omega(q)$, mais au prix d'une certaine complication du terme principal. En effet, ainsi que l'a montré Granville dans une version préliminaire, non publiée, de l'article cité en référence, la méthode du col (cf. Hildebrand & Tenenbaum 1986, 1993) s'applique presque sans changement pour

$$u \geqslant (\log_2 y)^2, \quad P(q) \leqslant y, \quad \omega(q) \ll \sqrt{y}/\log y \tag{1.6}$$

et fournit une évaluation du type

$$\Psi_q(x,y) = \Psi(x,y) \prod_{p|q} (1-p^{-\alpha})\{1+\text{erreur}\}, \tag{1.7}$$

où $\alpha = \alpha(x,y)$ est l'unique solution de l'équation

$$\sum_{p \leqslant y} \frac{\log p}{p^{\alpha}-1} = \log x. \tag{1.8}$$

(En fait Granville énonce une estimation valable pour $\omega(q) \leqslant y^{1-\epsilon}$, mais cela résulte apparemment d'une inexactitude.) La méthode de Xuan (1993) fournit aussi une estimation de type (1.7) en supposant seulement, dans (1.6), $u \gg \log_2 y/\log_3 y$. Il ne semble pas que la méthode du col, en son état actuel, permette une telle région de validité.

(vi) Compte tenu des évaluations de $\alpha(x,y)$ données dans Hildebrand & Tenenbaum (1986), on peut déduire de (1.7) une nouvelle preuve de l'optimalité du domaine de validité (Ω) pour l'estimation (1.4).

2. Démonstration

Nous pouvons supposer x assez grand car le résultat est trival dans le cas contraire. Dans toute cette section, nous désignons par $\alpha = \alpha(x,y)$ la solution de (1.8) et par $E_q(x,y)$ le terme d'erreur de (1.4). Nous posons pour $s \in \mathbb{C}$, $y \geqslant 2$,

$$\zeta_q(s,y) \coloneqq \prod_{\substack{p \leqslant y \\ p \nmid q}} (1-p^{-s})^{-1}, \quad \zeta(s,y) \coloneqq \zeta_1(s,y).$$

Dans un premier temps, nous examinons le cas $y \leqslant (\log x)^2$. On a alors

$$\log(1+u) \geqslant \tfrac{1}{2}\log_2 x \geqslant \tfrac{1}{4}\log y,$$

de sorte que la condition (Ω) implique que $\omega(q)$ est borné. Dans ces circonstances, la relation (1.4) équivaut à

$$\Psi_q(x,y) \ll (\varphi(q)/q)\,\Psi(x,y) \asymp \Psi(x,y),$$

ce qui est trivialement vérifié.

Ensuite, nous traitons le cas

$$y > (\log x)^2, \quad u > (\log_2 2y)^2. \tag{2.1}$$

On a sous cette hypothèse

$$\Psi_q(x,y) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\alpha-\mathrm{i}/\log y}^{\alpha+\mathrm{i}/\log y} \zeta_q(s,y)\frac{x^s}{s}\,\mathrm{d}s + O(\Psi(x,y)\,Y^{-1}), \tag{2.2}$$

avec $Y \coloneqq \exp\{(\log_2 2y)^{\frac{3}{2}}\}$ Cela découle du Lemma 10 de Hildebrand & Tenenbaum (1986) lorsque $q=1$, mais la même démonstration fournit le cas général, en remarquant que $\zeta_q(\alpha,y) \leqslant \zeta(\alpha,y)$ et en utilisant la majoration triviale

$$\Psi_q(x+z,y) - \Psi_q(x-z,y) \leqslant \Psi(x+z,y) - \Psi(x-z,y) \quad (z \geqslant 0).$$

A ce stade, nous observons que, pour $s = \alpha + \mathrm{i}\tau$, $|\tau| \leqslant 1/\log y$, on a

$$\prod_{p \mid q} (1-p^{-s}) = \frac{\varphi(q)}{q} \exp\left\{O\left(\sum_{p \mid q} \frac{|1-p^{-\mathrm{i}\tau}|}{p} + \frac{p^{1-\alpha}-1}{p}\right)\right\}, \tag{2.3}$$

puisque la formule (7.8) de Hildebrand & Tenenbaum (1986) pour α fournit, sous la première hypothèse (2.1) et pour x assez grand,

$$0 \leqslant 1-\alpha \leqslant \frac{3}{2} \frac{\log(1+u)}{\log y} \leqslant \frac{3}{4}. \tag{2.4}$$

Associé à la majoration élémentaire

$$\frac{p^{1-\alpha}-1}{p} \leqslant A \frac{p_1^{1-\alpha}-1}{p_1} \quad (2 \leqslant p_1 \leqslant p, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1),$$

où A est une constante absolue, l'encadrement (2.4) nous permet d'inférer que, notant p_ω le $\omega(q)$-ième nombre premier, la somme sous l'exponentielle dans (2.3) est

$$\ll \sum_{p \leqslant p_\omega} \left(\frac{|\tau| \log p}{p} + \frac{p^{1-\alpha}-1}{p}\right) \ll E_q(x, y).$$

Il suit

$$\prod_{p \mid q} (1-p^{-s}) = \frac{\varphi(q)}{q} (1 + O(E_q(x,y))).$$

Reportant cela dans (2.2), nous obtenons

$$\Psi_q(x,y) = \frac{\varphi(q)}{q} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\alpha - \mathrm{i}/\log y}^{\alpha + \mathrm{i}/\log y} \zeta(s,y) \frac{x^s}{s} \mathrm{d}s + O(\Psi(x,y)\, Y^{-1})$$
$$+ O\left(\frac{\varphi(q)}{q} E_q(x,y) \int_{\alpha - \mathrm{i}/\log y}^{\alpha + \mathrm{i}/\log y} \left|\zeta(s,y) \frac{x^s}{s}\right| |\mathrm{d}s|\right).$$

En appliquant (2.2) avec $q = 1$, on voit que le terme principal de cette expression vaut

$$(\varphi(q)/q)\, \Psi(x,y) \{1 + O(Y^{-1})\}.$$

De plus, le Lemma 11 de Hilbebrand & Tenenbaum (1986) énonce que l'intégrale du second terme d'erreur est $\ll \Psi(x,y)$. Puisqu'enfin

$$Y^{-1} \ll (\varphi(q)/q)\, E_q(x,y)$$

sous la condition (Ω), nous obtenons bien (1.4).

Il reste à traiter le cas

$$1 \leqslant u \leqslant (\log_2 2y)^2. \tag{2.5}$$

En fait la méthode que nous allons employer fonctionne dans le domaine plus vaste $u \leqslant (\log y)^{1-\epsilon}$ pour tout $\epsilon > 0$. La démonstration repose sur un résultat auxiliaire relevant de la théorie du crible.

Lemme. *Soit K une constante positive arbitraire. On a uniformément pout $q \geqslant 1$, $x \geqslant 1 + \omega(q)$, $\delta := 1/\log(3+\omega(q))$,*

$$N_q(x) := \sum_{\substack{n \leqslant x \\ (n,q)=1}} 1 = \frac{\varphi(q)}{q} x \{1 + O(x^{-K\delta} + \mathrm{e}^{-\sqrt{\log x}})\}.$$

Démonstration. La première étape consiste à remarquer que nous pouvons supposer $x > (1+\omega(q))^{\exp(40K)}$, car le résultat découle, dans le cas contraire, de la majoration classique

$$N_q(x) \ll x \prod_{\substack{p\mid q\\ p\leqslant 1+w(q)}} \left(1-\frac{1}{p}\right) \ll x\frac{\varphi(q)}{q}\left(1-\frac{1}{1+\omega(q)}\right)^{-\omega(q)} \ll x\frac{\varphi(q)}{q}.$$

Ensuite, nous appliquons le lemme fondamental du crible, sous la forme donnée dans Diamond & Halberstam (1985). Notant q_z le plus grand diviseur de q tel que $P(q_z) \leqslant z$, nous avons uniformément en $z \geqslant 1$, $v \geqslant 1$,

$$N_{q_z}(x) = x(\varphi(q_z)/q_z)\{1+O(v^{-v/2})\}+O(z^v).$$

Choisissons $z := (\omega(q)+\exp\{\surd\log x\})^2$, $v := (\log x)/(2\log z)$, de sorte que, si K et x sont assez grands, on a $\log v \geqslant 8K$. On peut alors écrire

$$N_{q_z}(x) = x(\varphi(q)/q)\{1+O((1-1/z)^{-\omega(q)}-1)\}\{1+O(\mathrm{e}^{-4Kv})\}+O(\surd x).$$

Le premier terme d'erreur est estimé par

$$\ll \exp\{\mathrm{O}(\omega(q)/z)\}-1 \ll \exp\{-\surd\log x\},$$

et le second par

$$\ll \exp\left\{\frac{-2K\log x}{\log(1+\omega(q))+\surd\log x}\right\} \ll \exp\{-K\delta\log x\}+\exp\{-\surd\log x\}.$$

Nous avons donc établi que l'on a, sous les conditions de l'énoncé,

$$N_{q_z}(x) = (\varphi(q)/q)\,x\{1+O(x^{-K\delta}+\mathrm{e}^{-\surd\log x})\},$$

et il reste seulement à montrer que la différence $N_{q_z}(x)-N_q(x)$ est englobée par le terme d'erreur.

On a en effet

$$\begin{aligned}0 \leqslant N_{q_z}(x)-N_q(x) &= \sum_{\substack{d\mid q/q_z\\ d>1}} \mu(d)N_{q_z}\left(\frac{x}{d}\right)\\ &\ll \sum_{\substack{d\mid q/q_z\\ d>1}} \mu(d)^2\frac{x}{d} \ll x\left\{\prod_{p\mid q/q_z}\left(1+\frac{1}{p}\right)-1\right\}\\ &\ll x\{(1+1/z)^{\omega(q)}-1\} \ll x\,\mathrm{e}^{-\surd\log x}.\end{aligned}$$

Cela complète la preuve du lemme.

Nous sommes maintenant en mesure d'achever la démonstration de notre théorème. Nous appliquons d'abord les formules (5.4) et (5.5) de Fouvry & Tenenbaum (1991), valables pour

$$u \leqslant L_\epsilon(y) := \exp\{(\log y)^{3/5-\epsilon}\}.$$

Nous obtenons

$$\Psi_q(x,y) = \Lambda_q(x,y)+O\left(\Psi(x,y)\,L_{\epsilon/2}(y)^{-1}\prod_{p\leqslant p_\omega}(1+p^{\beta-1})\right), \tag{2.6}$$

avec

$$\Lambda_q(x,y) := \begin{cases} x\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(u-v)\,\mathrm{d}R_q(y^v) & (x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}^+), \\ \Lambda_q(x+0,y) & (x\in\mathbb{Z}^+), \end{cases}$$

$$0<\beta \ll \log(1+u)/\log y,$$

où $R_q(t)$ est défini par l'identité $N_q(t) = t\{\varphi(q)/q + R_q(t)\}$. Sous la condition (Ω), le produit en p dans (2.6) n'excède pas

$$\exp\Big\{\sum_{p\leqslant p_\omega} p^{\beta-1}\Big\} \ll \exp\Big\{\log_2 p_\omega + O\Big(\frac{p_\omega^\beta-1}{\beta\log p_\omega}\Big)\Big\} \ll \delta^{-1}.$$

Il suit

$$\Psi_q(x,y) = \Lambda_q(x,y) + O(\Psi(x,y)\,L_\epsilon(y)^{-1}). \tag{2.7}$$

Ensuite, nous évaluons $\Lambda_q(x,y)$. A cette fin, nous appliquons la formule (4.22) de Fouvry & Tenenbaum (1991) avec $k=0$ et $q_0=q$. Nous obtenons

$$\Lambda_q(x,y) = x\{(\varphi(q)/q)\,\rho(u) + S_1 + S_2\},$$

avec

$$S_1 := R_q(x), \quad S_2 := \int_0^\infty \rho'(u-v)\,R_q(y^v)\,\mathrm{d}v.$$

Soit $0<\epsilon<1$. Nous supposons dorénavant

$$u \leqslant (\log y)^{1-\epsilon}. \tag{2.8}$$

D'après le lemme, on a sous les conditions (Ω), (2.8), et pour $K\geqslant 3c$, $q\neq 1$,

$$\begin{aligned} S_1 &\ll \frac{\varphi(q)}{q}\{y^{-Ku/\log(3+\omega(q))} + \mathrm{e}^{-\surd(u\log y)}\} \\ &\ll \frac{\varphi(q)}{q}\Big\{\frac{\log(3+\omega(q))}{\log y}u^{-2u} + \frac{\exp(-\frac12 u^{1+\epsilon/2})}{\log y}\Big\} \\ &\ll \frac{\varphi(q)}{q}E_q(x,y), \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la minoration connue $\rho(u) \gg u^{-2u}$ $(u\geqslant 1)$ (cf. par exemple Tenenbaum 1990, théorème III.5.8).

L'estimation de S_2 nécessitera la majoration suivante (cf. par exemple Tenenbaum 1990, corollaires III.5.8.1, et 8.2), relative à la fonction de Dickman, et dans laquelle $\xi(u)$ est défini pour $u>1$ comme l'unique solution positive de l'équation $\mathrm{e}^\xi = 1+u\xi$, avec la convention $\xi(1)=0$,

$$\rho(u-v) \ll \rho(u)\,\mathrm{e}^{v\xi(u)} \quad (0\leqslant v\leqslant u). \tag{2.9}$$

Il est à noter que

$$\xi(u) \sim \log u \quad (u\to+\infty). \tag{2.10}$$

Nous décomposons S_2 sous la forme $S_2 = S_{21}+S_{22}$, où S_{21} correspond au domaine d'intégration $0\leqslant v\leqslant v_0 := 1/(\delta\log y)$.

En utilisant l'estimation

$$\rho'(u-v) \ll \rho(u-v)\log(1+u) \ll \rho(u)\log(1+u)\,\mathrm{e}^{v\xi(u)} \quad (0\leqslant v\leqslant u),$$

qui découle de (2.9), et en remarquant que la condition (Ω) implique $v_0\,\xi(u) \ll 1$, nous pouvons écrire

$$S_{21} \ll \rho(u)\log(1+u)\int_0^{v_0}\left\{\frac{N_q(y^v)}{y^v}+\frac{\phi(q)}{q}\right\}\mathrm{d}v$$

$$\ll \rho(u)\log(1+u)\left\{\frac{1}{\log y}\sum_{\substack{n\leqslant y^{v_0}\\(n,q)=1}}\frac{1}{n}+v_0\frac{\varphi(q)}{q}\right\}.$$

La somme en n est

$$\ll \prod_{\substack{p\leqslant y^{v_0}\\ p\nmid q}}(1+p^{-1}) \ll v_0\log y \prod_{\substack{p\leqslant y^{y_0}\\ p\mid q}}(1-p^{-1})$$

$$\ll v_0\log y(\varphi(q)/q)\,(1-y^{-v_0})^{-\omega(q)} \ll v_0\log y\,\varphi(q)/q.$$

Il suit

$$S_{21} \ll (\varphi(q)/q)\,\rho(u)\,E_q(x,y), \tag{2.11}$$

ce qui est acceptable compte tenu de (1.5).

Pour majorer S_{22}, nous faisons de nouveau appel à notre lemme. Grâce à (2.10), il est clair que nous pouvons choisir la constante K suffisamment grande pour que $\mathrm{e}^{\xi(u)} \leqslant y^{K\delta/2}$. Nous obtenons alors

$$S_{22} \ll \frac{\varphi(q)}{q}\rho(u)\log(1+u)\int_0^u\{y^{-Kv}+\mathrm{e}^{-\surd(v\log y)}\}\,\mathrm{d}v$$

$$\ll \frac{\varphi(q)}{q}\rho(u)\log(1+u)\left\{\frac{1}{\delta\log y}+\int_0^u \mathrm{e}^{v\xi(u)-\surd(v\log y)}\,\mathrm{d}v\right\}.$$

Dans le domaine (2.8) on a, pour x, et donc y, assez grand,

$$v\xi(u)^2 \leqslant \tfrac{1}{4}\log y \quad (0\leqslant v\leqslant u)$$

et l'on peut estimer la dernière intégrale par

$$\ll \int_0^u \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\surd(v\log y)}\,\mathrm{d}v \ll 1/\log y.$$

Ainsi la majoration (2.11) est également valable pour S_{22} et on obtient finalement

$$A_q(x,y) = (\varphi(q)/q)\,\Psi(x,y)\{1+O(E_q(x,y))\}. \tag{2.12}$$

Et reportant cette estimation dans (2.7) et en remarquant que l'on a, sous l'hypothèse (2.8), et donc *a fortiori* sous (2.5),

$$L_\epsilon(y)^{-1} \ll (\varphi(q)/q)\,E_q(x,y),$$

nous obtenons la conclusion attendue.

Remarque finale. Nous déduisons en fait de (2.7) et (2.12) la validité de la formule

$$\Psi_q(x,y) = A_q(x,y)\{1+O(L_\epsilon(y)^{-1})\} \tag{2.13}$$

uniformément dans l'intersection des domaines (Ω) et

$$x\geqslant 3,\quad \exp\{(\log x)^{(1/2)+\epsilon}\} \leqslant y \leqslant x. \tag{2.14}$$

Cela constitue un renforcement partiel du théorème 2 de Fouvry & Tenenbaum (1991).

L'auteur tient ici à exprimer ses remerciements à Ti Zuo Xuan pour lui avoir signalé ses résultats avant publication.

Bibliographie

Balog, A. & Pomerance, C. 1992 The distribution of smooth integers in arithmetic progressions. *Proc. Am. math. Soc.* **115**, 33–43.

Diamond, H. G. & Halberstam, H. 1985 The combinatorial sieve. In *Number Theory, Proc. 4th Matsci. Conf. Ootacamund/India 1984. Lect. Notes Math.* **1122**, 63–73.

Fouvry, E. & Tenenbaum, G. 1991 Entiers sans grand facteur premier en progressions arithmétiques. *Proc. Lond. math. Soc.* **63**, 449–494.

Friedlander, J. B. 1976 Integers free from large and small primes. *Proc. Lond. math. Soc.* **33**, 565–576.

Granville, A. 1993 Integers, without large prime factors, in arithmetic progressions. I. *Acta math.* **170**, 255–273.

Hildebrand, A. 1986 On the number of positive integers $\leqslant x$ and free of prime factors $> y$. *J. Number Theory* **22**, 289–307.

Hildebrand, A. & Tenenbaum, G. 1986 On integers free of large prime factors. *Trans. Am. math. Soc.* **296**, 265–290.

Hildebrand, A. & Tenenbaum, G. 1993 Integers without large prime factors (Prépublication.)

Saias, E. 1990 Applications de la méthode du col à certains problèmes de crible. Thèse, Université de Nancy 1.

Tenenbaum, G. 1990 Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres. Revue de l'Institut Elie Cartan no. 13, Département de Mathématiques de l'Université de Nancy 1.

Xuan, T. Z. 1993 Integers with no large prime factors. (Prépublication.)